Exploración matemática

Creación de modelos matemáticos para representar la lluvia

Motivos:

He decidido que esta exploración matemática gire en torno al tema del clima (el tiempo meteorológico).
Para empezar, estudié las sugerencias que me había dado el profesor. Al considerar distintas ideas, me di cuenta de que el clima era un tema que me llamaba especialmente la atención, porque nunca antes me había parado a pensar sobre la relevancia de las matemáticas en el campo de la climatología. ¿Sería posible predecir el tiempo que va a hacer mañana utilizando las matemáticas? Investigué un poco sobre la relevancia en la meteorología, pero no encontré nada que resultase especialmente interesante. Sin embargo, yo estaba empeñada en seguir con mi idea original de hacer un trabajo sobre el clima, así que decidí relacionarlo con un tema más personal. Habiendo vivido en un país como Alemania casi toda mi vida, uno se encuentra cara a cara con la lluvia prácticamente todos los días del año. La lluvia va y viene, pase lo que pase. Así, decidí que iba a escribir la exploración sobre la lluvia; es decir, sobre objetos que caen. ¿Es posible crear modelos matemáticos para describir la lluvia?
¿Qué necesitaba tener en cuenta? En primer lugar decidí qué factores quería tener en cuenta en mi modelo y, a continuación, analicé un poco más en detalle la lluvia, propiamente dicha. Hay distintos tipos de lluvia: la experiencia de caminar bajo la lluvia es ciertamente distinta si se trata de una leve llovizna o si uno está en medio de la calle durante una tormenta.
Por lo tanto, decidí comenzar por analizar las gotas de lluvia según su tamaño: en primer lugar, gotas muy pequeñas, cuyo diámetro $d \leq 0{,}008$ cm y, a continuación, gotas más grandes, cuyo diámetro $d \geq 0{,}125$ cm. Además, la caída de los objetos no sólo depende de la gravedad y de la masa propiamente dicha, sino que se ve afectada también por la resistencia del aire. Así, las gotas de lluvia experimentan un arrastre o fuerza hacia arriba (de resistencia al avance) que hay que tener en cuenta cuando se elabore el modelo matemático para la lluvia. Se determinó la velocidad de la gota de lluvia en el momento del impacto (es decir, la velocidad terminal) y el tiempo que tarda en llegar al suelo.
Finalmente, se generalizó el modelo al caso del salto en paracaídas, puesto que un paracaidista es, en cierta manera, una gota de lluvia muy muy grande que cae del cielo. Sin embargo, existe una diferencia esencial: el paracaídas mismo, ya que el paracaidista siempre va a experimentar una caída en dos fases: la fase de caída libre y, a continuación, el descenso lento, una vez que se ha abierto el paracaídas. Esto hay que tenerlo en cuenta cuando se desarrolle el modelo.

Introducción:

La lluvia es un fenómeno con el que nos topamos regularmente en nuestra vida diaria. ¿Pero qué sabemos realmente sobre él? Sabemos que se trata de la precipitación de un líquido y que la lluvia puede tener distinta intensidad; por ejemplo, hay lluvia fina (llovizna) o fuertes lluvias (una tormenta). El objetivo de esta exploración es desarrollar un modelo para la lluvia.

Para poder hacerlo correctamente, decidí determinar primero cuáles son los factores relacionados con la lluvia, y que, por tanto, hay que incluir en el modelo: Tal y como se menciona anteriormente, la intensidad de la lluvia no es constante. Es una medida de la cantidad de lluvia que cae a lo largo del tiempo. Así, se puede medir la altura que alcanza el agua en el suelo durante un intervalo de tiempo concreto, dada en milímetros por hora. Pero la intensidad de la lluvia no es el único factor que importa. Para determinar el resto de factores lo que me resultó más fácil fue pensar en la caída de un objeto (un bolígrafo, por ejemplo) cuando se deja caer desde una cierta altura. ¿Qué factores influyen sobre la caída del bolígrafo? La fuerza gravitacional sería lo primero que nos vendría a la mente, pero la aceleración y la velocidad son también factores importantes que hay que tener en cuenta, al igual que la distancia a la que se encuentra el bolígrafo del suelo y el tiempo que tarda el bolígrafo en llegar al suelo.

Primer modelo (sin tener en cuenta la resistencia del aire):

Para desarrollar el primer modelo, y teniendo en cuenta los factores mencionados anteriormente, investigué un poco sobre las fuerzas que se ejercen sobre un objeto que cae, y encontré la Segunda Ley del Movimiento de Newton, que establece que la fuerza es igual a la masa por la aceleración.[1] Esto se puede escribir como:

$F = ma$, donde F es la fuerza, m la masa del objeto y a es su aceleración.
Esta Ley del Movimiento de Newton se puede utilizar para crear un modelo matemático para una gota con aceleración constante; esto es, ignorando la resistencia del aire. Sabemos que la aceleración a es la derivada primera de la velocidad v y la segunda derivada de la posición s. Esto se puede escribir como:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Para un objeto que cae, sabemos que $a = g$. A partir de ahí obtenemos:

$$\frac{dv}{dt} = a = g$$

Así, tenemos una ecuación diferencial que representa la caída de una gota de lluvia con aceleración constante. Para resolver la ecuación tenemos que establecer primero unas condiciones iniciales: La gota de agua está inicialmente en reposo a 1000 metros de altura, en el aire. Tomaremos ese lugar como origen. Investigando un poco averigüé que la aceleración constante que experimenta un objeto que cae (y sobre el cual la única fuerza significativa que actúa es la fuerza gravitacional) es g = 9,81 ms^{-2}.[2] También se puede establecer que, en el origen: $v(0) = 0, s(0) = 0, t = 0$.

La ecuación diferencial se puede ahora resolver utilizando métodos básicos de integración:

$$\frac{dv}{dt} = g$$
$$dv = gdt$$
$$\int dv = \int g\,dt$$
$$v = gt + k$$

Para hallar la constante de integración hay que utilizar las condiciones iniciales mencionadas anteriormente. Así: $v(0) = 0, t = 0$

---

[1] Dpto. de Física y Astronomía, Univ. de Tennessee (EE. UU.) "*Newton's Three Laws of Motion*" *[Las tres leyes del movimiento de Newton]*[en línea] <http://csep10.phys.utk.edu/astr161/lect/history/newton3laws.html>, [Consulta: 1 de mayo de 2010]

[2] "*Acceleration of Gravity y Newton's Second Law of Motion*"*[La aceleración de la gravedad y la 2ª Ley del Movimiento de Newton]* [en línea] <http://www.engineeringtoolbox.com/accelaration-gravity-d_340.html>, [Consulta: 3 de mayo de 2010]

$0 = g(0) + k$
$k = 0$

De ese modo, tenemos que:
$v = gt$

Ahora, para continuar, podemos hacer uso de otra ecuación de posición: $\frac{ds}{dt} = v$. De nuevo, se pueden emplear métodos básicos de integración para resolver la ecuación diferencial.

$v = gt$
$v = \frac{ds}{dt}$
$\frac{ds}{dt} = gt$
$ds = gtdt$
$\int ds = \int gt\,dt$
$s = \frac{g}{2}t^2 + k$

Para determinar la constante de integración hay que utilizar nuevamente las condiciones iniciales $s(0) = 0, t(0) = 0$. De ese modo, tenemos que:

$0 = \frac{g}{2}(0)^2 + k$
$k = 0$

Con todo ello obtenemos:
$s = \frac{g}{2}t^2$

Tal y como indicamos anteriormente, s = 1000 m y g = 9,81 ms^{-2}. Estos valores se pueden introducir en la ecuación anterior para así resolverla para el tiempo, t:

$1000 = \frac{9{,}81}{2}t^2$
$2000 = 9{,}81t^2$
$t^2 = \frac{2000}{9{,}81}$
$t = \sqrt{\frac{2000}{9{,}81}}$
$t = 14{,}278$

Para determinar cuál es la velocidad de la gota en el momento en el que llega al suelo podemos utilizar la primera ecuación, $v = gt$.

$v = 9{,}81 \times 14{,}278$
$v = 140{,}0714$

Hemos creado un modelo matemático para representar el movimiento de una gota de lluvia que cae desde una altura dada (1.000 metros) y que experimenta una aceleración constante $g = 9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}$. Tal y como nos habíamos propuesto, los resultados obtenidos muestran cuánto tiempo tarda la gota en llegar al suelo y la velocidad que tiene en el momento de llegar al suelo. Como hemos demostrado anteriormente, la gota tarda unos 14,278 segundos en llegar al suelo y en ese momento tiene una velocidad de aproximadamente 140,0714 metros por segundo.

El valor de la velocidad parece bastante elevado. De hecho, lo que sucede es que este modelo no es realista, puesto que hemos dicho que la gota de lluvia caía desde una altura de un kilómetro. Además, únicamente hemos tenido en cuenta la fuerza gravitacional. Sin embargo, en realidad la gota también está sujeta a la resistencia del aire, que tira de ella hacia arriba. Sin embargo, cuando uno observa el modelo de aceleración constante, se puede decir que es válido sea cual sea el tamaño de la gota de lluvia, puesto que ni la aceleración ni la velocidad dependen de la masa.
Cuando uno observa más atentamente la ecuación de la aceleración, $\frac{dv}{dt} = g$, vemos que no es posible determinar la velocidad terminal de la gota de lluvia, dado que $g = 9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}$ y, por tanto, la aceleración nunca puede ser igual a cero. Esto significaría que la gota de lluvia nunca deja de acelerar, cosa que en la práctica no se cumple.[3]

Segundo modelo (gotas de lluvia pequeñas, teniendo en cuenta la resistencia del aire):

Una vez obtenido este primer modelo para la caída de las gotas de lluvia, ahora queremos desarrollar un modelo más realista que tenga en cuenta la resistencia del aire, que es la fuerza que actúa contra todo aquello que se mueve por la atmósfera o por el aire. El grado de resistencia del aire depende de diversos factores, siendo los más importantes la velocidad del objeto y el área de su sección transversal.[4] Así, el aumento tanto de la velocidad como del área de la sección transversal de un objeto en movimiento conlleva un aumento del grado de resistencia del aire.
Para incluir la resistencia del aire con la que se encuentran las gotas de lluvia, primero hay que obtener más información sobre este «empuje hacia arriba» que experimentan. La investigación realizada indica que las gotas muy pequeñas, aquellas con diámetro $d \leq 0{,}008$ cm, experimentan una fuerza de empuje hacia arriba (de frenado) que es proporcional a la velocidad. Teniendo en cuenta que la fuerza es proporcional a la aceleración, obtenemos que:

$F_{drag} \propto a_{drag} \propto v$ (*drag* es “empuje o frenado” en inglés)

De ese modo, tenemos que:

$$a_{drag} = kv$$

Los experimentos realizados demuestran que $k = 12{,}2\ \mathrm{s}^{-1}$.

Tal y como hemos indicado, la aceleración, si no se tiene en cuenta la resistencia del aire, es constante: $g = 9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}$.

---

3 EMERSON, Brandon, “*Raindrop Modeling*“ [*Modelos matemáticos para representar gotas de lluvia*] [en línea], <bpemer.people.wm.edu/Raindrops.doc>, [Consulta: 28 de abril de 2010]
4 “*The Forces at Work – Gravity*“ [*Las fuerzas que hay en juego: la gravedad*], [en línea] < http://ffden-2.phys.uaf.edu/211.fall2000.web.projects/vlad%20paverman/forces.htm>, [Consulta: 22 de mayo de 2010]

Para poder hallar una nueva ecuación diferencial para este modelo, necesitamos incluir tanto la aceleración constante como el «empuje hacia arriba (fuerza de frenado)». Así, la aceleración viene dada por:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - kv$$

Utilizando esta ecuación diferencial podemos hallar fácilmente la velocidad terminal de la gota de lluvia. La velocidad terminal de un objeto que cae se define como la velocidad constante que se alcanza cuando no hay aceleración resultante; es decir, cuando la aceleración es igual a cero. De este modo, a partir del modelo se puede obtener el valor de la velocidad terminal.

$$0 = g - kv$$

$$g = kv$$

$$v = \frac{g}{k}$$

Sustituyendo en la fórmula los valores de g y k obtenemos que:

$$v = \frac{9{,}81}{12{,}2}$$

$$v = 0{,}804$$

Si seguimos trabajando con el modelo y pasamos a integrar la fórmula, podemos demostrar el resultado anterior representando gráficamente la ecuación obtenida para la velocidad. De un modo similar, a la hora de calcular el tiempo que tarda la gota de lluvia en llegar al suelo, la ecuación de la velocidad, que depende del tiempo, debería dar el mismo resultado que antes.

Vamos a pasar ahora a integrar la ecuación diferencial:

$$\int \frac{dv}{g - kv} = \int dt$$

$$\left(-\frac{1}{k}\right) \ln\left(g - kv\right) = t + a$$

$$\ln(g - kv) = -kt + a$$

$$g - kv = e^{-kt+a}$$

$$g - kv = e^{-kt} \times e^{a}$$

e^{a} es una constante y, por tanto, podemos pasar a denominarla b para simplificar la ecuación. Con todo ello obtenemos:

$$g - kv = b \times e^{-kt}$$

Para obtener la constante de integración b hay que tener en cuenta las condiciones iniciales, que son las mismas que teníamos en el primer modelo: $v(0) = 0, t = 0$.
De ese modo, tenemos que:

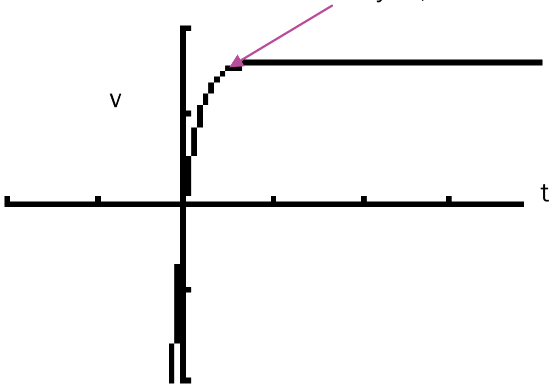
$$g - k(0) = b \times e^{-k(0)}$$
$$g = b$$

Reemplazando en la ecuación la constante de integración por su valor y resolviendo la ecuación para la velocidad v, obtenemos que:

$$g - kv = ge^{-kt}$$
$$g - ge^{-kt} = kv$$
$$v = \frac{g - ge^{-kt}}{k}$$
$$v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})$$

Podemos pasar ahora a representar gráficamente la ecuación anterior para demostrar que la velocidad terminal obtenida anteriormente es correcta. El gráfico debería alcanzar, en un algún momento, una pendiente igual a cero. Así, una vez que el gráfico alcanza una meseta horizontal, podemos determinar la velocidad terminal.

Punto en el que la pendiente de la curva se hace cero: x=1, y=0,804



$$y = \frac{9{,}81}{12{,}2}(1 - e^{-12{,}2t})$$

```
WINDOW
 Xmin=-1
 Xmax=2
 Xscl=,5
 Ymin=-1
 Ymax=1
 Yscl=,5
 Xres=1
```

X	Y1
0	0
1	,80409
2	,8041
3	,8041
4	,8041
5	,8041
6	,8041

Y1=(9,81/12,2)*…

Como puede verse, el gráfico es mayormente horizontal y rápidamente, en menos de un minuto, se alcanza el punto en el que la pendiente es igual a cero. Por lo tanto, podemos suponer que durante casi todo el trayecto las gotitas caen con velocidad = velocidad terminal. Este hecho, a primera vista, choca bastante: ¿por qué un cuerpo que cae experimenta aceleración cero durante un periodo de tiempo tan largo? Esto es debido a la fuerza de frenado que ejerce la resistencia del aire. Dicha resistencia existe porque las moléculas de aire chocan con el cuerpo durante su caída, dando lugar a una fuerza hacia arriba, opuesta a la gravedad. Llega un momento en el que esta fuerza de frenado iguala el peso del objeto que cae; a partir de ese momento, el objeto seguirá cayendo a una velocidad constante (denominada velocidad terminal).[5]

Como antes, utilizaremos ahora una segunda ecuación, la correspondiente a la posición: $\frac{ds}{dt} = v$. De ese modo, tenemos que:

$$v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})$$
$$\frac{ds}{dt} = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})$$
$$ds = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})dt$$

Ahora ya podemos integrar este problema:

$$\int ds = \int \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})dt$$
$$\Rightarrow s = \frac{g}{k}\left(t + \frac{1}{k}e^{-kt}\right) + c$$

Para averiguar el valor de la constante de integración c, recurrimos de nuevo a las condiciones iniciales: $s(0) = 0, t(0) = 0$. A partir de ahí concluimos que:

$$0 = \frac{g}{k}(0 + \frac{1}{k}) + c$$
$$\Rightarrow c = -\frac{g}{k^2}$$

Incorporando ahora el valor de la constante de integración:

$$s = \frac{g}{k}(t + \frac{1}{ke^{kt}}) - \frac{g}{k^2}$$
$$s = \frac{g}{k}(t + \frac{1}{ke^{kt}} - \frac{1}{k})$$

Podemos ahora sustituir los valores conocidos ($s = 1000$,$g = 9{,}81$y $k = 12{,}2$) para obtener:

$$1000 = \frac{9{,}81}{12{,}2}(t + \frac{1}{12{,}2e^{12{,}2t}} - \frac{1}{12{,}2})$$

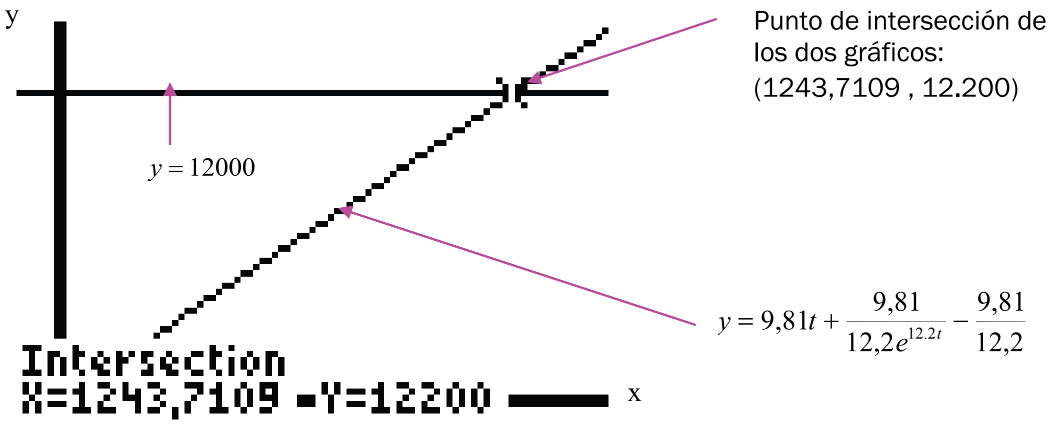
---

5 ELERT, Glenn, "*Speed of a Skydiver (Terminal velocity)*" [*Velocidad de un paracaidista (velocidad terminal)*], [en línea] <http://hypertextbook.com/facts/JianHuang.shtml>, [consulta: 10 de mayo de 2010]

En vez de resolver la ecuación de manera algebraica, es mejor representar gráficamente la ecuación $y = \frac{9{,}81}{12{,}2}(t + \frac{1}{12{,}2e^{12{,}2t}} - \frac{1}{12{,}2})$ y hallar la intersección con la ecuación $y = 1000$. Esto se puede hacer utilizando la calculadora de pantalla gráfica. Sin embargo, para evitar fracciones complicadas es mejor simplificar primero:

$$12200 = 9{,}81t + \frac{9{,}81}{12{,}2e^{12{,}2t}} - \frac{9{,}81}{12{,}2}$$

Así, representamos gráficamente las dos ecuaciones y hallamos el punto de intersección de los dos gráficos.




```
WINDOW
  Xmin=-100
  Xmax=1500
  Xscl=1
  Ymin=-300
  Ymax=15000
  Yscl=1
  Xres=1
```

Vemos que se cruzan en y = 12.200, x=1243,711. Ahora hay que dividir este número por 60 para determinar el tiempo en minutos que tarda la gota en llegar al suelo.

$$\frac{1243{,}711}{60} = 20{,}729$$

Así, vemos que la gota de lluvia tarda aproximadamente 21 minutos en llegar al suelo. Una vez que conocemos el tiempo, podemos determinar a qué velocidad va la gota de lluvia en el momento de llegar al suelo. Obtuvimos que:

$$v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})$$

De ese modo, tenemos que:

$$v = \frac{9{,}81}{12{,}2}(1 - e^{(-12{,}2 \times 20{,}729)})$$

$$v = 0{,}804 m / s$$

Este resultado coincide con el obtenido anteriormente para la velocidad terminal.

Tercer modelo (gotas más grandes, teniendo en cuenta la resistencia del aire):

Vamos a seguir ampliando el modelo del movimiento de las gotas de lluvia. Es poco razonable suponer que todas las gotitas de lluvia tienen un tamaño inferior a 0,008 cm. Por ello, consideraremos también gotas de lluvia de mayor tamaño, aquellas que tienen un diámetro $d \geq 0{,}125$ cm. Para desarrollar un modelo matemático que represente correctamente la caída de las gotas más grandes, incluiremos por supuesto el empuje hacia arriba (fuerza de frenado) a la que se ven sometidas. En este caso, los experimentos demuestran que esta fuerza es proporcional al cuadrado de la velocidad, y que la constante de proporcionalidad es $c = 0{,}0097$.
Sabiendo esto, podemos modificar el modelo de las gotas pequeñas, adaptándolo a las nuevas condiciones. Así, tenemos que:

$$\frac{dv}{dt} = g - kv^2$$

De nuevo, vamos a integrar esta ecuación:

$$\int \frac{dv}{g - kv^2} = \int dt$$

La integral de la izquierda parece bastante complicada de resolver, puesto que tenemos que reducirla a fracciones simples para poder integrar. Empleando fracciones simples, sabemos que:

$$\frac{1}{g - kv^2} = \frac{1}{2\sqrt{g} \times (v\sqrt{k} + \sqrt{g})} - \frac{1}{2\sqrt{g} \times (v\sqrt{k} - \sqrt{g})}$$

Ahora podemos hacer uso de esta igualdad para integrar y, dado que g es una constante, la expresión anterior se puede reescribir como:

$$\int \frac{dv}{2\sqrt{g} \times (v\sqrt{k} + \sqrt{g})} - \int \frac{dv}{2\sqrt{g} \times (v\sqrt{k} - \sqrt{g})} = \int dt$$

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} \times \int \frac{dv}{k\sqrt{v} + \sqrt{g}} - \frac{1}{2\sqrt{g}} \times \int \frac{dv}{v\sqrt{k} - \sqrt{g}} = \int dt$$

E integrando, tenemos que:

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} \times \left(\frac{\ln\left|v\sqrt{k} + \sqrt{g}\right|}{\sqrt{k}} - \frac{\ln\left|v\sqrt{k} - \sqrt{g}\right|}{\sqrt{k}} \right) = t$$

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} \times \left(\frac{\ln\left|v\sqrt{k} + \sqrt{g}\right| - \ln\left|v\sqrt{k} - \sqrt{g}\right|}{\sqrt{k}} \right) = t$$

Aplicando las reglas de los logaritmos, obtenemos que:

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} \times \frac{\ln\left|\dfrac{v\sqrt{k}+\sqrt{g}}{v\sqrt{k}-\sqrt{g}}\right|}{\sqrt{k}} = t + C$$

$$\ln\left|\frac{v\sqrt{k}+\sqrt{g}}{v\sqrt{k}-\sqrt{g}}\right| = (t+C)\times 2\sqrt{g}\sqrt{k}$$

Las condiciones iniciales son $v = 0, t = 0$, con lo que $C = 0$ y:

$$\ln\left|\frac{\sqrt{k}v+\sqrt{g}}{\sqrt{k}v-\sqrt{g}}\right| = \left(2\sqrt{kg}\right)$$

Simplificando:

$$e^{\left(2\sqrt{kg}\right)} = \frac{\sqrt{k}v+\sqrt{g}}{\sqrt{k}v-\sqrt{g}}$$

$$e^{\left(2\sqrt{kg}\right)}\left(\sqrt{k}v-\sqrt{g}\right) = \sqrt{k}v+\sqrt{g}$$

$$\sqrt{k}v\left(e^{\left(2\sqrt{kg}\right)}-1\right) = \sqrt{g}\left(e^{\left(2\sqrt{kg}\right)}+1\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}}\left(\frac{e^{\left(2\sqrt{kg}\right)}+1}{e^{\left(2\sqrt{kg}\right)}-1}\right)$$

Y con esto ya hemos hallado la fórmula de la velocidad. Se trata de una ecuación diferencial para la distancia s. Simplificando aún más obtenemos:

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}}\left(\frac{e^{(2\sqrt{kg})t}+1}{e^{(2\sqrt{kg})t}-1}\right)$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{k}}\left(\frac{e^{(2\sqrt{kg})t}-1+2}{e^{(2\sqrt{kg})t}-1}\right)$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{k}}\left(1+\frac{2}{e^{(2\sqrt{kg})t}-1}\right)$$

$$\int ds = \sqrt{\frac{g}{k}}\int\left(1+\frac{2}{e^{(2\sqrt{kg})t}-1}\right)dt$$

Para poder integrar esta fracción recurrimos a la sustitución:

$$u = e^{\left(2\sqrt{kg}\right)}$$

$$du = 2\sqrt{kg}e^{\left(2\sqrt{kg}\right)}dt$$

$$\Rightarrow dt = \frac{du}{2\sqrt{kg}u}$$

$$s = \left(\sqrt{\frac{g}{k}}\right)t + 2\left(\sqrt{\frac{g}{k}}\right)\int\frac{du}{2\sqrt{kg}u(u-1)}$$

$$s=\left(\sqrt{\frac{g}{k}}\right)t+\sqrt{\frac{g}{k^2g}}\int\frac{du}{u(u-1)}$$

Ahora podemos emplear la descomposición en fracciones simples para resolver esta última integral:

Sabemos que $\dfrac{1}{u(u-1)}=\dfrac{1}{(u-1)}-\dfrac{1}{u}$.

Y, por lo tanto:

$$\int\frac{du}{u(u-1)}=\int\left(\frac{1}{(u-1)}-\frac{1}{u}\right)dt$$

, lo cual se puede expresar como:

$$\int\left(\frac{1}{(u-1)}-\frac{1}{u}\right)dt=\int\frac{dt}{(u-1)}-\int\frac{dt}{u}$$

Esta expresión ya se puede integrar.

$$\int\frac{dt}{(u-1)}-\int\frac{dt}{u}=\ln|u-1|-\ln|u|$$

Dado que hemos utilizado el método de sustitución y hemos introducido u, ahora llega el momento de volver a sustituir u por su valor.

$$u=e^{\left(2\sqrt{kg}\right)}$$

De este modo, obtenemos:

$$\ln\left|e^{\left(2\sqrt{kg}\right)}-1\right|-\ln\left|e^{\left(2\sqrt{kg}\right)}\right|$$

Con sólo volver a introducir esta parte en la ecuación anterior obtenemos una solución para s:

$$s=\left(\sqrt{\frac{g}{k}}\right)t+\sqrt{\frac{g}{k^2g}}\left(\ln\left|e^{\left(2\sqrt{kg}\right)}-1\right|-\ln\left|e^{\left(2\sqrt{kg}\right)}\right|\right)$$

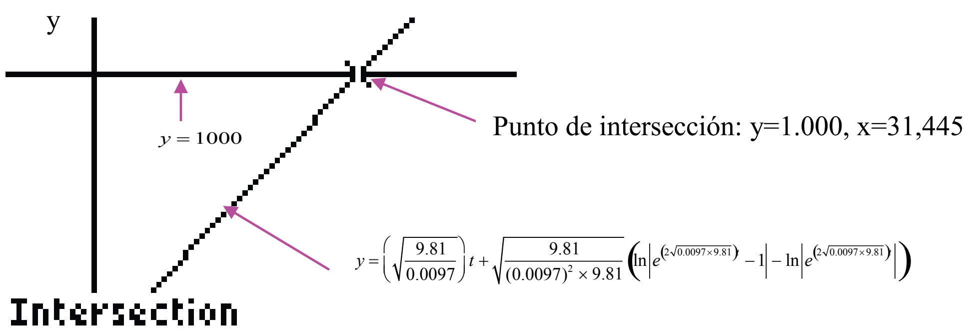
Podemos ahora sustituir los valores conocidos (s = 1000, g = 9,81 y k = 0,0097) y así obtener:

$$1000=\left(\sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}0097}}\right)t+\sqrt{\frac{9{,}81}{(0{,}0097)^2\times 9{,}81}}\left(\ln\left|e^{\left(2\sqrt{0{,}0097\times 9{,}81}\right)}-1\right|-\ln\left|e^{\left(2\sqrt{0{,}0097\times 9{,}81}\right)}\right|\right)$$

Para resolver la ecuación y hallar el valor de t, podemos representar gráficamente las dos ecuaciones ($y=1000$ y

$$y=\left(\sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}0097}}\right)t+\sqrt{\frac{9{,}81}{(0{,}0097)^2\times 9{,}81}}\left(\ln\left|e^{\left(2\sqrt{0{,}0097\times 9{,}81}\right)}-1\right|-\ln\left|e^{\left(2\sqrt{0{,}0097\times 9{,}81}\right)}\right|\right)$$

) y hallar el punto de intersección de los dos gráficos.



```
WINDOW
 Xmin=-10
 Xmax=50
 Xscl=1
 Ymin=-10
 Ymax=1200
 Yscl=0
 Xres=1
```

Así, vemos que se cruzan en y = 1000, x=31,445. El valor que hemos obtenido para *x* es el tiempo que tarda la gota de lluvia en llegar al suelo. Introduciendo ahora este valor en la ecuación de la velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}}\left(\frac{e^{(2\sqrt{kg})t}+1}{e^{(2\sqrt{kg})t}-1}\right)$$

De este modo, obtenemos:

$$v = \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}0097}}\left(\frac{e^{(2\sqrt{9{,}81\times 0{,}0097})\times 31{,}445}+1}{e^{(2\sqrt{9{,}81\times 0{,}0097})\times 31{,}445}-1}\right)$$

$$v = 31{,}802 m/s$$

De nuevo, sabemos que este resultado es la velocidad terminal $\frac{dv}{dt} = g - kv^2$, tal y como explicamos anteriormente. Para hallar la velocidad terminal, calculamos cuánto vale *v* en el instante en el que la aceleración es igual a cero. Así, tenemos que:

$$g = kv^2$$

$$v^2 = \frac{g}{k}$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$v = \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}0097}}$$

$$v = 31{,}802$$

Resulta razonable suponer que también las gotas de lluvia de mayor tamaño caen durante la mayor parte del trayecto a la velocidad terminal.

El problema del paracaídas:

Para aplicar el modelo matemático de las gotas de lluvia a los seres humanos, podemos considerar un salto con paracaídas. Dado que no sé mucho sobre paracaidismo, decidí buscar primero un poco de información sobre los aspectos básicos de esta disciplina.

En un salto con paracaídas típico, hay una persona que salta desde un avión que vuela a una altitud aproximada de 4.400 metros. El período de caída libre dura un minuto, aproximadamente. A continuación se abre el paracaídas para ralentizar el aterrizaje; este segundo período dura entre cinco y siete minutos.

Para crear un modelo matemático que represente un salto en paracaídas, podemos decir que el paracaidista, como cualquier otro objeto que cae, experimenta una aceleración constante $g = 9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}$, wado que todos los objetos caen con el mismo grado de aceleración independientemente de cuál sea su masa.
También tenemos que tener en cuenta la resistencia del aire. De hecho, podemos emplear el mismo modelo que anteriormente utilizamos para la caída de las gotas de lluvia de pequeño tamaño.

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - kv$$

Sin embargo, ya que el tamaño de una persona no es comparable al tamaño de una pequeña gota de lluvia, necesitamos encontrar un valor de k distinto, puesto que en el caso del paracaidista la resistencia que ejerce el aire no es la misma. Asimismo, el grado de resistencia que ejerce el aire dependerá también, en última instancia, de la posición que adopte el paracaidista en el aire. Por ejemplo, un paracaidista que cae con los brazos y piernas en cruz se encontrará con una mayor resistencia del aire que un paracaidista que caiga de pie o de cabeza; este hecho está relacionado con el concepto del «área de la sección transversal» de un objeto que cae, tal y como se explicó anteriormente.
También se indicó anteriormente que el grado de resistencia del aire estará sujeto a cambios durante la caída libre, puesto que también depende de la velocidad. La resistencia del aire es pequeña al inicio del salto y el paracaidista en su caída comienza a acelerar. A medida que aumenta la velocidad del paracaidista en caída libre también va creciendo la resistencia del aire, reduciéndose así la aceleración. Llegará un momento en que la fuerza debida a la resistencia del aire sea igual y opuesta a la fuerza de la gravedad. A partir de ese momento, la velocidad del paracaidista se mantendrá constante. Así, se habrá alcanzado la denominada velocidad terminal.[6]

Para poder desarrollar un modelo para el problema del paracaidista, sería necesario dividir la caída libre en tres partes, cada una de ellas con un grado distinto de resistencia del aire. A continuación, también tendríamos que desarrollar un modelo para el tramo de descenso lento, cuando el paracaidista ya ha desplegado el paracaídas. Sin embargo, el proceso matemático es muy simple, y es el mismo que aplicamos en el segundo modelo para gotas de lluvia de pequeño tamaño. Sólo es necesario reemplazar k por el correspondiente valor de la resistencia del aire; es decir, por la constante de proporcionalidad relativa a la velocidad.

Habiendo ampliado la exploración matemática al problema del salto del paracaidista, ahora uno puede reflexionar de manera crítica sobre el trabajo realizado. Podemos comenzar por examinar el primer modelo, que simplemente trata a las gotas de lluvia como objetos que caen. Como tal, resulta un modelo poco realista, puesto que no tiene en cuenta la resistencia del aire. Sin embargo, los resultados que da este modelo, aunque son hipotéticos, se pudieron utilizar como punto de partida aproximado para desarrollar los otros modelos.
El segundo modelo, el que analiza las gotas de lluvia de menor tamaño, tiene en cuenta el efecto de la resistencia del aire, por lo que logra acercarse mucho más a la realidad. Sin embargo, este modelo cuenta con una serie de incertidumbres. Para empezar, hemos metido en un mismo grupo a todas las gotas de lluvia cuyo diámetro es inferior a 0,008 cm y, por lo tanto, los resultados no son función del tamaño de la gota de lluvia. Además, hemos supuesto que el grado de resistencia que ejerce el aire es siempre el mismo, cuando, en realidad, está sujeto a diversos factores. Tal y como establecimos anteriormente, depende del área de la sección transversal y de la velocidad del objeto

[6] "*Air resistance and friction*" ["*resistencia del aire y rozamiento"*], [en línea] <http://www.slideshare.net/scienceinteractive/ks3-9k-air-resistance-and-friction>, [consulta: 23 de mayo de 2010]

y, por tanto, va cambiando durante la caída. Sin embargo, esto constituye únicamente una inexactitud menor, puesto que hemos descubierto que las gotas de lluvia alcanzan la velocidad terminal al cabo de muy poco tiempo y, por tanto, viajan a esta velocidad terminal (es decir, a velocidad constante) durante casi toda la caída. Sin embargo, la resistencia del aire también puede estar influida por factores medioambientales, tales como la presencia de fuertes vientos.
Estas incertidumbres también afectan al tercer modelo, el que analiza el movimiento de las gotas de lluvia de mayor tamaño.

Bibliografía:

ELERT, Glenn. "*Speed of a Skydiver (Terminal Velocity)*" [*La velocidad de un paracaidista (velocidad terminal)*] *The Physics Factbook*. [en línea] <http://hypertextbook.com/facts/JianHuang.shtml> [Consulta: 10 de mayo de 2010].

EMERSON, Brandon. "*Raindrop Modeling*" ["*Modelos matemáticos para representar el movimiento de una gota de lluvia"*] [en línea] <bpemer.people.wm.edu/Raindrops.doc> [Consulta: 28 de abril de 2010].

"*The Forces at Work - Gravity*."[*"Las fuerzas que hay en juego: la gravedad"*] [en línea] <http://ffden-2.phys.uaf.edu/211.fall2000.web.projects/vlad%20paverman/forces.htm> [Consulta: 22 de mayo de 2010].

"*Intensity of Rainfall*." *["La intensidad de las precipitaciones"]*. [en línea] <http://www.floodsite.net/juniorfloodsite/html/en/student/thingstoknow/hydrology/rainfallintensity.html> [Consulta: 7 de mayo de 2010].

"*Air Resistance and Friction*" [*"Resistencia del aire y rozamiento"*] [en línea] <http://www.slideshare.net/scienceinteractive/ks3-9k-air-resistance-and-friction> [Consulta: 23 de mayo de 2010].

MEADE, Douglas B. "*Ode Models for the Parachute Problem*" ["*Modelos para el problema del paracaidista"*] [en línea] <http://www.math.sc.edu/~meade/papers/sr-parachute.pdf> [Consulta: 16 de mayo de 2010].

PHOEBUS, Ronald y REILLY, Cole. "*Differential Equations and the Parachute Problem*" ["*Ecuaciones diferenciales y el problema del paracaidista*"] [en línea] <http://online.redwoods.cc.ca.us/instruct/darnold/DEProj/sp04/coleron/paper1.pdf> [Consulta: 15 de mayo de 2010].

SMITH, David A. y MOORE, Lawrence C. "*Raindrops*" [*"Gotas de lluvia"*] The Mathematical Association of America. [en línea] <http://mathdl.maa.org/mathDL/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=315&pf=1> [Consulta: 5 de mayo de 2010].

"*Student Project: Skydiving*" *["Proyecto de estudios: Salto en paracaídas"]* [en línea] <http://education.alberta.ca/media/930712/03%20pure30%20feb-09%20skydiving%20student%20project_pdf%20final.pdf> [Consulta: 18 de mayo de 2010].